2000 年 10 月 10 日

ハーデークロス法(Hardy Cross 法)

ウイリアム・ヘーゼン公式

$$h = r\,Q^{1.85} \qquad h:[\mathrm{m}] \quad Q:[\mathrm{m}^3/\mathrm{sec}] \quad r:[\mathrm{sec}^{1.85}/\mathrm{m}^{4.55}] \tag{1}$$ [1]

ダルシー・ワイズバッハ公式

$$h = r\,Q^{2} \qquad h:[\mathrm{m}] \quad Q:[\mathrm{m}^3/\mathrm{sec}] \quad r:[\mathrm{sec}^{2}/\mathrm{m}^{5}] \tag{2}$$ [2]

流量 Q に微小流量⊿Q を付加すれば、

$$h + \Delta h = r\,(Q + \Delta Q)^{1.85} \tag{3}$$

（１）式(3)を二項定理で展開する[3]

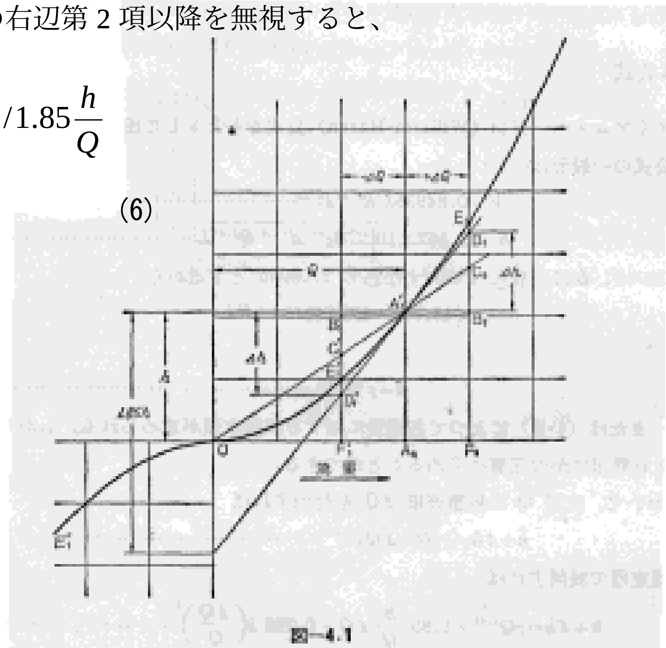
$$h + \Delta h = rQ^{1.85} + 1.85\frac{h}{Q}\Delta Q + 0.786h\left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)^2 + \Lambda \tag{4}$$

式(2)と式(4)から、

$$\Delta h = 1.85\frac{h}{Q}\Delta Q + 0.786\,h\left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)^2 + \Lambda \tag{5}$$

$(\Delta Q/Q)$ <<1 であるから、式(5)の右辺第 2 項以降を無視すると、

$$\Delta h \approx 1.85\frac{h}{Q}\Delta Q \qquad \therefore \Delta Q = \Delta h / 1.85\frac{h}{Q} \tag{6}$$



図−4.1

---

1 $r = 43.562\times 10^{17} C^{-1.85} d^{-4.87} L \qquad d:[\mathrm{mm}] \quad L:[\mathrm{m}]$

2 $r = 7.944 f\ d^{-5} L \qquad d:[\mathrm{m}] \quad L:[\mathrm{m}]$

3 $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \Lambda + b^n$

（２）式(2)を Q で微分し、点（ Q, h ）での接線を考える

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}Q}=1.85\,r\,Q^{0.85}=1.85\frac{h}{Q^{1.85}}Q^{0.85}=1.85\frac{h}{Q}$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta Q}\approx\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}Q}\qquad\therefore\frac{\Delta h}{\Delta Q}\approx1.85\frac{h}{Q}$$

となり、式(6)と一致する。すなわち、式(3)～(6)の行為は式(1)の 1 次導関数を導くことに他ならないことがわかった。

（３）電気回路網、熱回路網、流体回路網

線形

電気回路網　　$V=R\cdot I$

熱回路網　　$\Delta t=R\cdot q$

非線形

流体回路網　　$h=r\cdot Q^{1.85}$　　or　　$h=r\cdot Q^{2}$

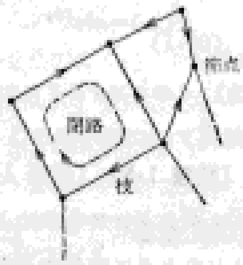
（Ⅱ）電気回路の性質は，オームの法則など素子の性質と，キルヒホッフの第 1，第 2 法則を用いて調べることができる．キルヒホッフの第 1 法則は，任意の節点に流れ込む電流の和が 0：

$$\sum_k i_k=0 \qquad (1\cdot20)$$

キルヒホッフの第 2 法則は，任意の閉路に沿って枝電圧の和を作ると 0：

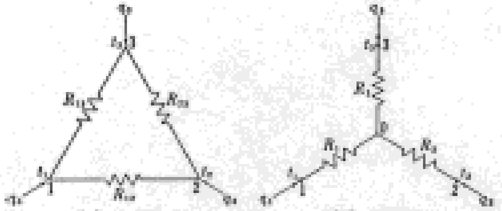
$$\sum_k v_k=0 \qquad (1\cdot21)$$

という形で表わされる．



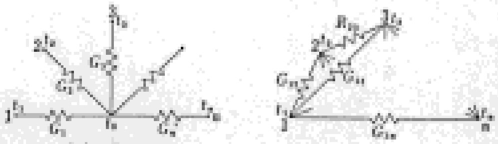
第 1-6 図　枝，節点，閉路．枝と閉路には向きをつける

線形回路網でのスター（Y）・デルタ（⊿）変換



(a)　Δ回路　　(b)　Y回路

図-4



(a)　Y回路　　(b)　Δ回路

図-6

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \qquad R_{12} = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_3}$$

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \qquad R_{23} = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_1}$$

$$R_1 = \frac{R_{23}R_{13}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} \qquad R_{13} = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_2}$$

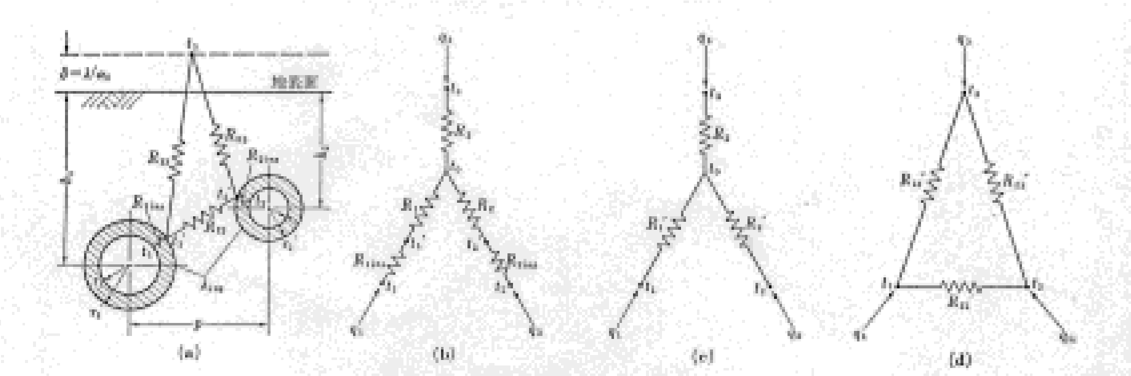
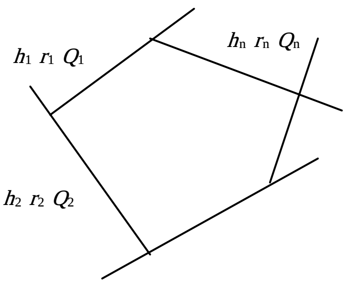


図-3

（４）非線形回路網

１回路のときを考える。



目的は、$\sum_{i=1}^{n} h_i = 0$　とすることである。

すなわち、

$$\sum_{i=1}^{n} r_i (Q_i + \Delta Q)^{1.85} = 0 \qquad (10)$$

式(10)を満足する⊿Qを見つけたい。式(10)を二項展開して[4]、　式(6)の考えを取り入れると、式(11)を得る。

$$\Delta Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i Q_i^{1.85}}{1.85 \sum_{i=1}^{n} r_i Q^{0.85}} \qquad (11)$$

（５）ニュートンの方法[5]

高次の代数方程式の根を求める方法に、逐次近似法がある。最初の推定値から一定の操作を繰返して、良好な近似値を得る方法であり、操作を無限に繰返したとき近似解が収束することの証明ができたときには、実用に供することができる。

---

4 式の展開の方法として、二項定理の他にテイラー展開が有名である。若干の条件はあるが、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \Lambda$$

逐次近似法の１方法にニュウートンの方法がある。

関数 $f(x)=0$ の実根を得るために、近似解 x_0 から出発して、 $f(x)=0$ のテイラー展開を作り、その第１次の項まで残した線形化方程式

$$f(x_0)+f^{(1)}(x_0)(x-x_0)=0 \tag{12}$$

を解き、第１次近似 x_1 を得る。次に、

$$f(x1)+f^{(1)}(x1)(x-x_1)=0$$

を解いて第２次近似 x_2 を得る。一般に、

$$f(x_n)+f^{(1)}(x_n)(x-x_n)=0 \tag{13}$$

この方法は、幾何学的にいえば曲線 $y=f(x)$ をその上の点 $[x_n, f(x_n)]$ における接線で近似し、それと x 軸との交点を次の近似値 x_{n+1} とするやり方である。

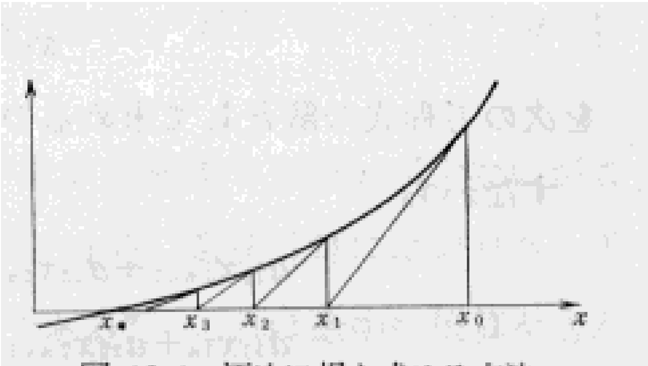


図 10.1　逐次に根を求める方法

（６） ２回路が接続しているとき[6]

a. 回路網の注意深い試験によって連続性を満足する流れの最良の分布を仮定する。

b. それぞれのパイプの水頭損失 $h=rQ^n$ を計算する。個々の当初の回路について正味の水頭損失を計算する。$\sum h=\sum rQ^n$ は、バランスしている回路については０(ゼロ)であるべきである。

c. それぞれの回路について、$\sum\left|nrQ^{n-1}\right|$ を計算する（全ての項は＋とする)。

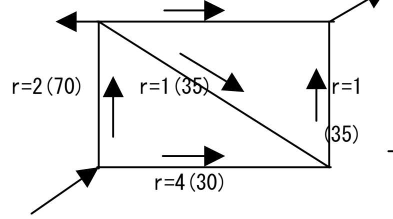
d. 当該回路で、水頭をバランスさせるために（ $\sum rQ^n=0$ ）、補正流量⊿Q を各々の回路に適用する。 $\Delta Q=\dfrac{\sum rQ^n}{\sum\left|nrQ^{n-1}\right|}$

e. 各々パイプについて改訂流量を計算する。望ましい精度が得られるまでこの手順を繰り返す。

⊿Q が回路に適用されるとき、それは全てのパイプに同じ意味を持っている。すなわち、時計回り方向では流量に加え、反時計回りでは流量から減ずる。⊿Q は符号が変えられているから、補正値の分母は絶対値の和である。

70^2x2=+9800	2x70x2=280
35^2x1=+1225	2x35x1= 70
30^2x4=−3600	2x30x4=240
7425	590

⊿Q=+7425/590=+13



15^2x5=+1125	2x15x5=150
35^2x1=−1225	2x35x1= 70
35^2x1=−1225	2x35x1= 70
−1325	290

⊿Q=−1325/290=−5

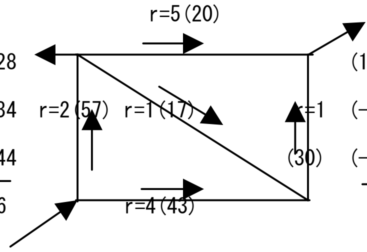
---

[5] 例えば、近藤次郎：技術者・研究者のための応用数学（下)、丸善（株）（1965）pp.270-272

[6] V.L.Streeter:Fluid Mechanics(Third Edition),McGRAW-HILL BOOK COMPANY,INC.(1962) pp.449-450

(70-13)	57^2x2=+6500	2x57x2=228
(35-13-(+5))	17^2x1= +289	2x17x1= 34
(-30-13)	43^2x4=-7400	2x43x4=344
	-611	606

⊿Q=-611/606=-1

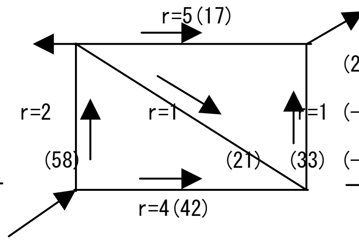


(15+5)	20^2x5=2000	2x20x5=200
(-35+5-(-13))	17^2x1=-289	2x17x1= 34
(-35+5)	30^2x1=-900	2x30x1= 60
	811	294

⊿Q=811/294=3

(57+1)	58^2x2=+6740	2x58x2=232
(17+1-(-3))	21^2x1= +441	2x21x1= 42
(-43+1)	42^2x4=-7050	2x42x4=344
	-131	610

⊿Q=-131/610≒ 0

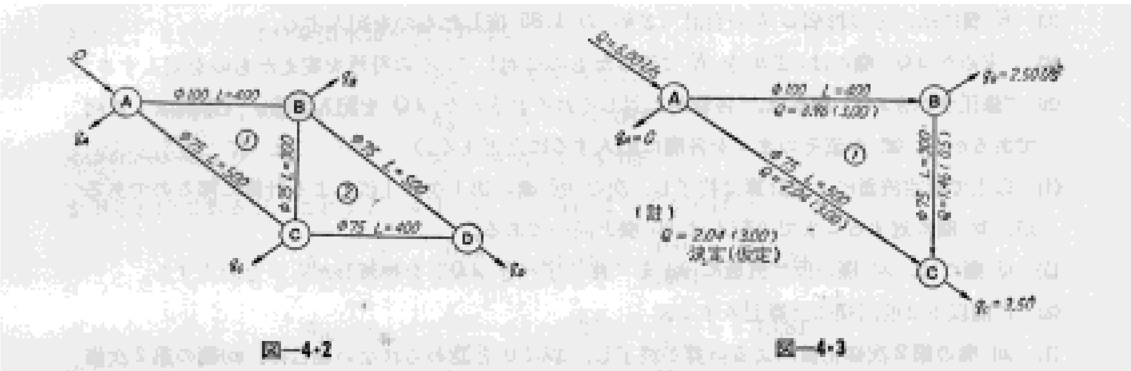


(20-3)	20^2x5=1444	2x17x5=170
(-17-3-(+1))	21^2x1=-441	2x21x1= 42
(-30-3)	33^2x1=-1089	2x31x1= 66
	-86	278

⊿Q=-86/278≒ 0

（８）絹川新一郎氏の方法[7]

絹川新一郎氏の方法による自社開発のプログラムと計算例



7 絹川新一郎：配水管網、計算法と流量表、技報堂（1957）